

Применение вертикальной модели сезонно-талого слоя для района оз. Тулик (Аляска)

В. М. БЕЛОЛИПЕЦКИЙ, С. Н. ГЕНОВА*

Институт вычислительного моделирования СО РАН — обособленное подразделение
ФИЦ КНЦ СО РАН, 660036, Красноярск, Россия

*Контактный автор: Генова Светлана Николаевна, e-mail: sv@icm.krasn.ru

Поступила 2 февраля 2021 г., доработана 31 мая 2021 г., принята в печать 4 июня 2021 г.

Практический интерес в районах вечной мерзлоты представляет глубина сезонного оттаивания. Построена одномерная (в вертикальном направлении) упрощенная полуэмпирическая модель динамики вечной мерзлоты в “приближении медленных движений границ фазового перехода”, основанная на задаче Стефана и эмпирических соотношениях. Калибровочные параметры модели выбираются для исследуемого района с использованием натуральных измерений глубины оттаивания и температуры воздуха. Проверка работоспособности численной модели проведена для района оз. Тулик (Аляска). Получено согласие рассчитанных значений глубины талого слоя и температуры поверхности почвы с результатами измерений.

Ключевые слова: вечная мерзлота, математическая модель, задача Стефана, эмпирические соотношения, летний период.

Цитирование: Белолипецкий В.М., Генова С.Н. Применение вертикальной модели сезонно-талого слоя для района озера Тулик (Аляска). Вычислительные технологии. 2021; 26(4):4–15. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.002.

Введение

В связи с изменением глобальной температуры воздуха представляет интерес оценка реакции вечной мерзлоты на изменение климата. При потеплении климата увеличивается как толщина слоя талого грунта, так и продолжительность периода существования талика. Для исследования мощности сезонно-талого слоя применяются математические модели различного уровня сложности [1–6]. В работе [1] рассматривается модель, основанная на мерзлотно-климатическом индексе, величина которого зависит от соотношения сумм отрицательных и положительных температур поверхности почвы. В работе [2] схема теплообмена представляет комбинацию задачи Стефана и метода использования эффективной теплоемкости среды. Модель прогноза мощности сезонно-талого слоя [3] основывается на задаче Стефана с условием Неймана на нижней границе исследуемой области и условием третьего рода на верхней границе. Первая физически полная динамическая модель вечной мерзлоты описана в [4]. Для определения вертикального профиля температуры и положения границы фазового перехода построены неявные

разностные схемы второго порядка точности по времени. Численная модель прогноза мощности сезонно-талого слоя [5] основывается на задаче Стефана с использованием алгоритма из [4]. Одномерная вертикальная модель вечной мерзлоты для болотно-озерных ландшафтов [6] учитывает образование новых и аннулирование существующих слоев.

В настоящей работе предлагается малоразмерная численная модель вертикальных распределений температуры в талом и мерзлом слоях для периода отсутствия мерзлого слоя на поверхности почвы (в тезисах [7] приведена аннотация данной работы). В вертикальном направлении выделяются талый и мерзлый грунты. Теоретическое описание температурного поля в почвах при их промерзании или оттаивании осуществляется с помощью решения задачи Стефана. Математическая модель основывается на уравнениях теплопроводности для мерзлой и талой зон. На межфазной границе ставятся условие Дирихле для температуры и условие Стефана.

Численные методы решения задач Стефана подразделяются на два класса: методы с явным выделением фронтов [8] и методы сквозного счета [9]. В настоящей работе реализован метод с выделением фронтов. Для определения динамики вечной мерзлоты построен упрощенный численный алгоритм в “приближении медленных движений границ фазового перехода”.

Калибровочные коэффициенты математической модели определяются из сопоставления рассчитанных выходных данных модели с результатами измерений.

1. Математическая модель динамики замерзания-оттаивания вечной мерзлоты

Летом в почве полярных районов в вертикальном направлении образуются два слоя, верхний — талый, нижний — мерзлый. Вертикальные распределения температуры в каждом слое находятся из решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего соответствующим граничным условиям:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\lambda_i}{c_{v,i}} \frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Здесь $T_i(t, z)$ — температура i -го слоя, °C, $i = 1, 2$; t — время, с; z — вертикальная координата (направлена вниз); $h_{i-1} \leq z \leq h_i$, $h_0 = 0$, $h_2 = H$; $\delta_1 = h_1$, $\delta_2 = H - h_1$ — толщины соответствующих слоев; λ_i — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·°C); $c_{v,i}$ — объемный коэффициент теплоемкости грунта, Дж/(м³·°C).

Граничные условия. Для уравнения теплопроводности на поверхности суши ставится условие третьего рода

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q_n, \quad (2)$$

где $q_n = q_0 - q_u - \alpha(T_1|_{z=0} - T_a)$ — суммарный тепловой поток, Вт/м²; q_0 — коротковолновая радиация; q_u — потери тепла при испарении; T_a — температура воздуха; α — коэффициент теплообмена, Вт/(м²·°C).

На подвижной границе фазового перехода ($z = h_1$)

$$T_1 = T_2 = T_{ph}, \quad (3)$$

$$\rho_2 L_2 \frac{dh_1}{dt} = \left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1} - \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1}. \quad (4)$$

Здесь $z = h_1$ — координата границы между талым и мерзлым слоями; T_{ph} — температура фазового перехода; ρ_2 — плотность мерзлого грунта; L_2 — скрытая теплота плавления мерзлого грунта. На глубине $z = H$ температура мерзлого грунта мало изменяется, полагаем

$$T_2 = T_H \quad \text{при } z = H. \quad (5)$$

Начальные условия: $T_i(0, z) = T_i^0$, $\delta_i = \delta_i^0$.

Введем новые независимые переменные (t, ξ_i) :

$$\begin{aligned} t = t, \quad \xi_1 &= \frac{z}{\delta_1}, & 0 \leq z \leq h_1, \quad 0 \leq \xi_1 \leq 1, \\ \xi_2 &= \frac{z - h_1}{\delta_2}, & h_1 \leq z \leq H, \quad 0 \leq \xi_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{\delta_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i}, & \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\delta_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} + w_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \\ w_i &= \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{1}{\delta_i} \left[(\xi_i - 1) \frac{dh_{i-1}}{dt} - \xi_i \frac{dh_i}{dt} \right], \end{aligned}$$

то уравнение (1) и граничные условия (2)–(5) запишутся в виде

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + w_i \frac{\partial T_i}{\partial \xi_i} = \frac{\lambda_i}{c_{v,i} \delta_i^2} \frac{\partial^2 T_i}{\partial \xi_i^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\lambda_1}{\delta_1} \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} = -q_0 + \alpha(T|_{\xi_1=0} - T_a) + q_u, \quad (7)$$

$$T_1|_{\xi_1=1} = T_2|_{\xi_2=0} = T_{ph}, \quad T_{2,j_2} = T_H, \quad (8)$$

$$\rho_2 L_2 \frac{dh_1}{dt} = \left(\frac{\lambda_2}{\delta_2} \frac{\partial T_2}{\partial \xi_2} \right) \Big|_{\xi_2=0} - \left(\frac{\lambda_1}{\delta_1} \frac{\partial T_1}{\partial \xi_1} \right) \Big|_{\xi_1=1}. \quad (9)$$

Введем равномерную разностную сетку в прямоугольнике $[0 \leq \xi_i \leq 1, 0 \leq t \leq t_n]$:

$$\Delta \xi_i = \frac{1}{j_i - 1}, \quad \xi_{i,j} = \frac{j - 1}{j_i - 1}, \quad t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq j \leq j_i.$$

Здесь $j_i = j_1, j_2$ — количество точек в соответствующем слое.

Численный алгоритм основан на явной схеме. Сеточные уравнения, соответствующие дифференциальному уравнению (6), для внутренних точек i -го слоя имеют вид

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = -A(w_{i,j}, T_{i,j}^n) + \frac{\lambda_i}{c_{v,i} \delta_i^2} \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta \xi_i^2}, \quad 2 \leq j \leq j_i - 1, \quad (10)$$

$T_{i,j}^{n+1} = T_i(t_{n+1}, \xi_{i,j})$, через A обозначена схема с разностями против потока.

$$A(w_{i,j}, T_{i,j}^n) = \frac{0.5}{\Delta \xi_i} (w_{i,j}^- T_{i,j+1}^n + 2w_i^0 T_{i,j}^n - w_{i,j}^+ T_{i,j-1}^n),$$

$$w_{1,j} = -\frac{\xi_{1,j} h_1^n - h_1^{n-1}}{\delta_1 \Delta t}, \quad w_{2,j} = \frac{(\xi_{2,j} - 1) h_1^n - h_1^{n-1}}{\delta_2 \Delta t}, \quad (11)$$

$$w_i^0 = |w_{i,j}|, \quad w_i^- = w_{i,j} - w_i^0, \quad w_i^+ = w_{i,j} + w_i^0.$$

Уравнение (6) с учетом условия (7) и $w_1|_{\xi_1=0} = 0$ запишется в виде

$$\frac{T_{1,1}^{n+1} - T_{1,1}^n}{\Delta t} = \frac{\lambda_1(T_{1,2}^n - T_{1,1}^n) + \delta_1 \Delta \xi_1 q_n^n}{0.5c_{v,1}\delta_1^2 \Delta \xi_1^2}. \quad (12)$$

Граничные условия

$$T_{1,j_1} = T_{2,1}^{n+1} = T_{ph}, \quad T_{2,j_2}^{n+1} = T_H. \quad (13)$$

Начальные условия

$$T_1|_{t=0} = T_{1,j}^0, \quad T_2|_{t=0} = T_{2,j}^0, \quad \delta_1|_{t=0} = \delta_1^0, \quad \delta_2|_{t=0} = \delta_2^0.$$

Система разностных уравнений имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству. Явная схема устойчива при выполнении условия

$$\Delta t \leq \min \left[\frac{\Delta \xi_i}{w_i}, \frac{c_{v,i}(\delta_i \Delta \xi_i)^2}{2\lambda_i} \right].$$

В конкретных расчетах шаг по времени уточнялся посредством численного эксперимента.

Численный алгоритм состоит из двух этапов. Пусть на n -м временном слое известны распределения температуры в рассматриваемых слоях и положение границы фазового перехода, тогда нахождение неизвестных переменных в момент времени t_{n+1} выполняется в два этапа: на первом этапе из соотношений (10)–(13) определяются распределения температуры в выделенных слоях. На втором этапе из численного решения уравнения (9) уточняется положение границы раздела фаз.

2. Калибровка параметров модели

Рассмотренная математическая модель динамики вечной мерзлоты в летний период содержит неопределенные параметры. Значения этих параметров находятся с помощью эмпирических формул, вычислительных экспериментов и результатов натурных измерений. В результате модель настраивается на конкретный объект исследований. Значения параметров модели могут существенно различаться в разных географических регионах.

В данной работе моделируется динамика вечной мерзлоты в летний период в районе оз. Тулик (Аляска). Используются массивы среднесуточных значений температуры воздуха, измеренной температуры почвы на глубине до 1.0 м; положение заглубления талого слоя определялось по нулевому значению температуры. Подробное описание массивов и сами данные размещены на сайте Arctic Data Center [10]. В табл. 1 приведены значения среднемесячных температур воздуха.

Месячные значения испаряемости рассчитываются по формуле Иванова [11]

$$E_0 = 0.0018(T_a + 25)^2 (100 - \psi). \quad (14)$$

Т а б л и ц а 1. Среднемесячные температуры воздуха (метеостанция оз. Тулик, W 149.35234118; N 68.63965631)

Table 1. Average monthly air temperatures (Lake Tulik weather station, W 149.35234118; N 68.63965631)

Год	Июнь	Июль	Август
2009	8.4	12.74	5.36
2010	9.51	9.8	9.14
2011	7.97	10.35	7.81
2012	10.8	11.7	8.36

Здесь E_0 — средняя за месяц испаряемость, мм/мес; T_a — среднемесячная температура воздуха; ψ — относительная влажность воздуха, %. Для полярных районов испарение определяется по формуле [11, 12]

$$E = \begin{cases} E_0 & \text{при } W_1 \geq W_0, \\ E_0 \frac{W_1}{W_0} & \text{при } W_1 < W_0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь W_1 — влажность грунта, мм/м; величина критической влажности почвы W_0 принимается равной 200 мм/м [12]. Из уравнения баланса влаги находится связь влажности грунта с осадками и испарением:

$$W_1 = \begin{cases} W_0 \frac{1}{0.2 + E_0/r} & \text{при } r \leq E_0, \\ W_0 \frac{1}{\mu + E_0/r} & \text{при } r > E_0, \quad E_0/r > 1 - \mu, \\ W_0 \frac{1 - E_0/r}{\mu} & \text{при } r > E_0, \quad E_0/r < 1 - \mu, \end{cases} \quad (16)$$

$\mu = \sqrt{0.04 \cdot [1 - (1 - E_0/r)^2] + (1 - E_0/r)^2}$; r — осадки, мм/мес. Скрытая теплота плавления среды L_2 (ккал/кг) зависит от льдистости мерзлого грунта:

$$L_2 = L_W W_\nu, \quad (17)$$

$L_W = 80$ ккал/кг — скрытая теплота плавления льда; $W_\nu = 10^{-3} W_2$, W_2 — льдистость грунта, мм/м. Коэффициенты теплопроводности грунта λ_1 , λ_2 рассчитываются в зависимости от его влажности и фазового состояния по эмпирической формуле [13]

$$\lambda_i = k \left(0.001 \rho_{ck} + 10 \frac{W_i}{\rho_{ck}} - 1.1 \right) - 11.6 \frac{W_i}{\rho_{ck}} \quad [\text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})]. \quad (18)$$

Здесь ρ_{ck} — плотность сухого грунта, кг/м³; k — эмпирический коэффициент (задается табличным способом, табл. 2).

Объемные коэффициенты теплоемкости грунтов $c_{v,i}$ рассчитываются по следующим формулам [13]:

$$\begin{aligned} c_{v,1} &= c_{ck} \rho_{ck} + 4180 W_1, \\ c_{v,2} &= c_{ck} \rho_{ck} + 4180 W_{uf} + 2090 (W_2 - W_{uf}). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь W_{uf} — незамерзшая влага, мм/м; c_{ck} , ρ_{ck} из табл. 3.

Т а б л и ц а 2. Значения эмпирического коэффициента k для мерзлых и талых минеральных грунтов [13]

Table 2. Values of the empirical coefficient k for frozen and thawed mineral soils [13]

Почва	Песок	Супесь, суглинок	Глина
Мерзлая	1.95	1.75	1.60
Талая	1.75	1.60	1.50

Т а б л и ц а 3. Характерные значения параметров грунтов [13]

Table 3. Characteristic values of soil parameters [13]

Параметр	Песок	Супесь	Суглинок	Глина	Торф
ρ_{ck} , кг/м ³ ,	1300	1400	1500	1500	200
c_{ck} , Дж/(кг·°C)	690	730	775	920	2000
W , min / max, мм/м	150/500	150/500	100/400	100/150	450/900
λ_1 , Вт/(м·°C)	1.05/2.15	1.05/1.9	0.90/1.70	0.85/1.60	0.30/0.55
λ_2 , Вт/(м·°C)	1.25/2.65	1.25/2.35	1.15/2.05	1.10/2.0	0.80/2.6

Параметризация составляющих теплового потока на границе атмосфера – суша. Суммарный тепловой поток представляется в виде $q_n = q_0 - q_u - \alpha(T_1 - T_a)$, Вт/м². Коротковолновая радиация рассчитывается по формулам [14]

$$q_0 = 0.94Q(h_c)(1 - 0.65n^2), \quad (20)$$

$$Q(h_c) = \left(0.66 + 0.34 \frac{\gamma - 0.9 + 0.4 \sin h_c}{0.1 + 0.4 \sin h_c} \right) \frac{\kappa_n \sin^2 h_c}{\rho^2 (\sin h_c + 0.107)},$$

$$h_c = \arcsin \left(\sin \varphi_k \sin \gamma_1 + \cos \varphi_k \cos \gamma_1 \cos \left((t - t_n) \frac{\pi}{12} \right) \right),$$

$$\gamma_1 = 0.4 + 23.4 \cos \left(\frac{2\pi}{365} (d + 192) \right) - 0.4 \cos \left(\frac{2\pi}{365} (d - 192) \right).$$

Здесь $\kappa_n = 1.1 \dots 1.23$ в зависимости от влагосодержания атмосферы; n – балл общей облачности в долях единицы; h_c – высота солнца, град.; ρ – плотность воздуха; $\gamma = 0.94$; φ_k – широта местности, град.; $t = 0, 1, \dots, 23$ – местное астрономическое время; $t_n = 12$ – полуденное местное время; γ_1 – склонение солнца; d – порядковый номер суток с начала года.

Потери тепла при испарении вычисляются по формуле

$$q_u = \rho_w L_u E = 0.969E \quad [\text{Вт/м}^2], \quad (21)$$

где ρ_w – плотность воды; $L_u = 600$ ккал/кг – скрытая теплота испарения; E – испарение, мм/мес. Коэффициент теплообмена α калибруется.

Этапы численного алгоритма.

Этап 1. Задаются среднемесячные температуры воздуха и осадки за месяц (из натуральных данных или из сценарных вариантов).

Этап 2. По формулам (14), (17)–(21) вычисляются испаряемость E_0 , влажность грунта W , скрытая теплота плавления среды L , коэффициенты теплопроводности грунта $\lambda_1, \lambda_2, v, i$, тепловой поток на границе атмосфера – суша q_n .

Этап 3. Выполняются расчеты по численному алгоритму (10)–(13).

3. Результаты численных экспериментов

В одномерной задаче Стефана при переходе к новым переменным расчетная область отображается на отрезок $[0, 1]$ по пространственной переменной. В уравнениях появляются конвективные слагаемые, характеризующие скорость переноса температуры w_i (модель 1). Рассмотрен упрощенный вариант решения задачи Стефана без учета w_i в уравнении для температуры (“приближение медленных движений границ фазового перехода”, модель 2).

С помощью вычислительных экспериментов по натурным данным о температуре воздуха и глубине сезонного оттаивания в 2010 г. были выбраны значения калибровочных параметров:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{°C}); & \rho_1 &= 1750 \text{ кг}/\text{м}^3, & \rho_2 &= 1800 \text{ кг}/\text{м}^3; \\ W_{uf} &= 0; & \rho_{ck} &= 1450 \text{ кг}/\text{м}^3, & c_{ck} &= 750 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{°C}); \\ k &= 1.65 \text{ (талый грунт)}, & k &= 1.8 \text{ (мерзлый грунт)}; \\ \text{для модели 1:} & & W_2 &= 120 \text{ мм}/\text{м}; & \psi &= 78\%; & r &= 48 \text{ мм}/\text{мес.}; \\ \text{для модели 2:} & & W_2 &= 122 \text{ мм}/\text{м}; & \psi &= 73\%; & r &= 48 \text{ мм}/\text{мес.} \end{aligned}$$

Эти параметры использовались при выполнении методических расчетов глубины сезонно-талого слоя (СТС) для данных 2010 г. с шагами по времени $\Delta t = 300$ и 10 с и по пространству $\Delta \xi = 0.1$ и 0.05 . Начальное условие $h_1^0 = 0.41$ м соответствует дате 01.06.2010 г. При расчетах до 03.07.2010 для значений дискретизации $(\Delta t, \Delta \xi) = (300, 0.1)$, $(10, 0.05)$ получены заглубления сезонно-талого слоя по модели 1 $h_1 = 1.0096$ м, 1.006 м и по модели 2 $h_1 = 1.0088$ м, 1.0077 м соответственно. (Измеренное значение глубины равно 1.013 м).

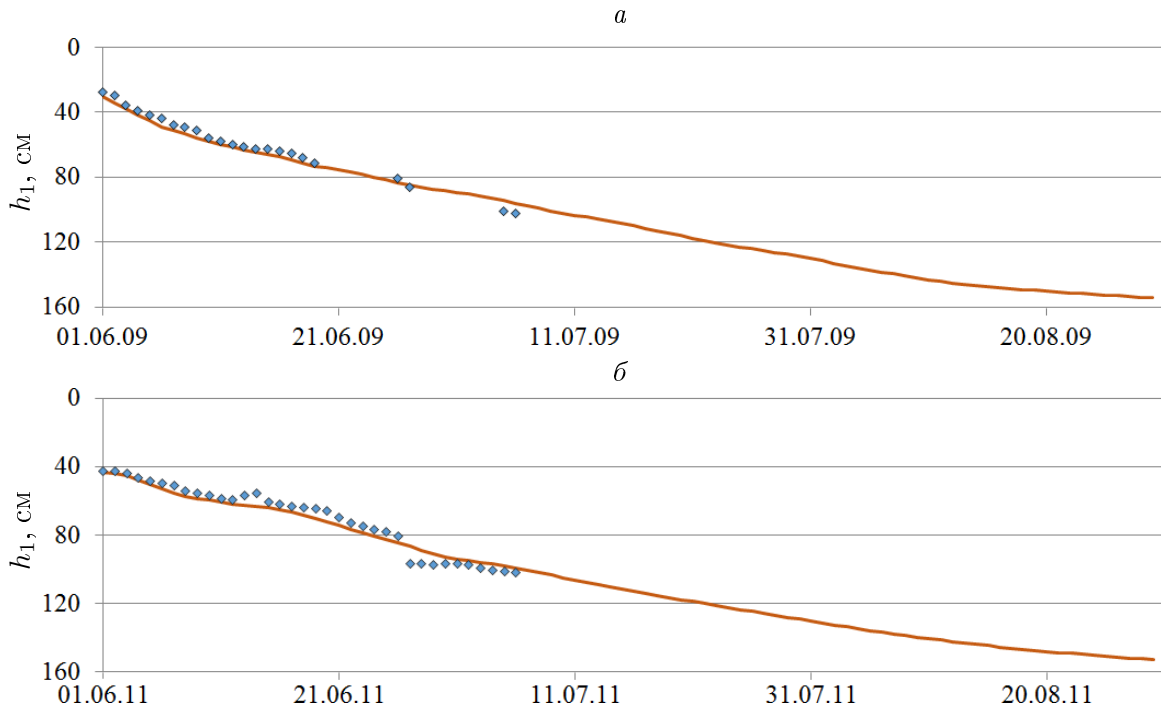


Рис. 1. Динамика заглубления талого слоя в 2009 г. (а) и 2011 г. (б). Точками обозначены измеренные значения, сплошная линия — рассчитанные

Fig. 1. Depth dynamics of thawed layer in 2009 (a) and 2011 (b). Dots indicate measured values, solid line — calculated ones

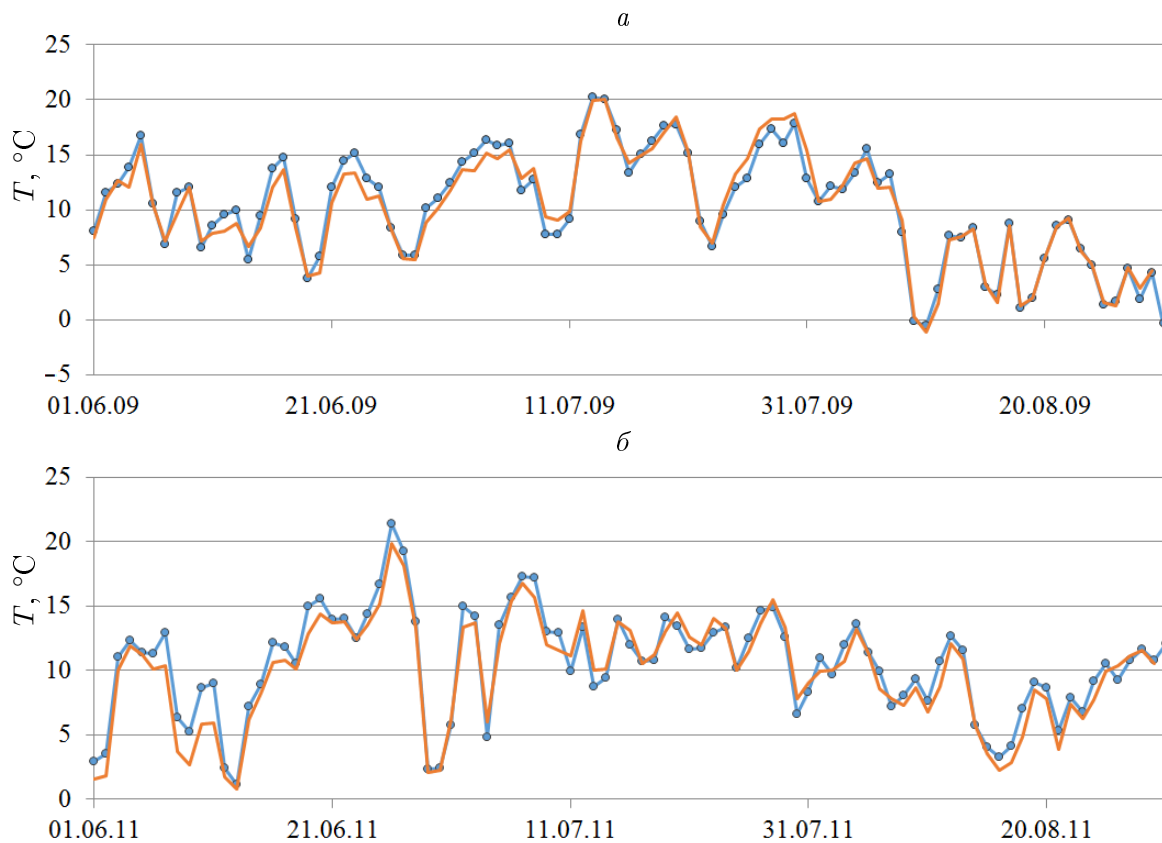


Рис. 2. Температура поверхности почвы в 2009 г. (а) и 2011 г. (б). Линии с точками — измеренные значения, сплошная линия — рассчитанные
 Fig. 2. Temperature of soil surface in 2009 (a) and 2011 (б). Line with points indicates measured values, solid line — calculations

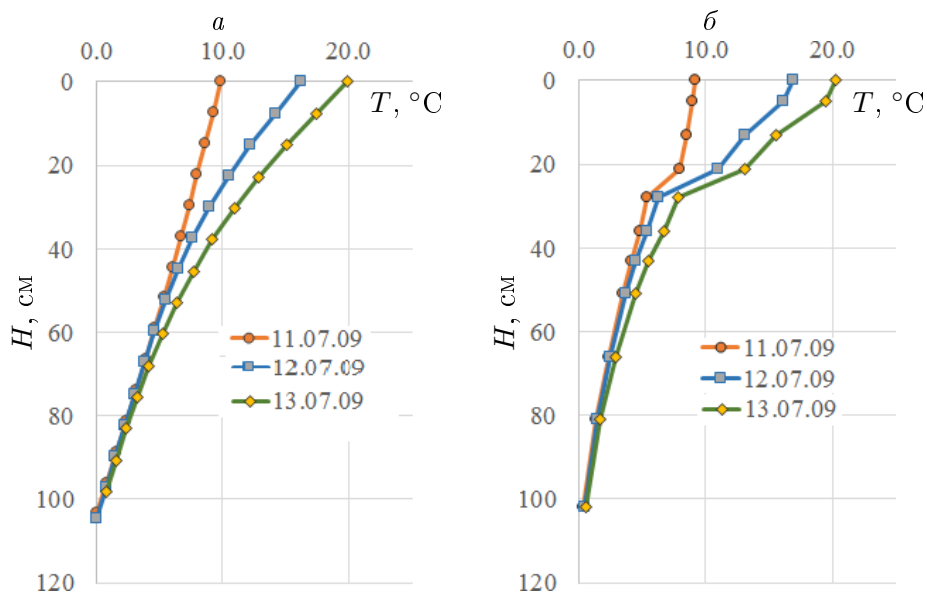


Рис. 3. Вертикальные профили температуры в июле 2009 г.: а — рассчитанные, б — измеренные значения
 Fig. 3. Vertical temperature profiles in July 2009: a — results of calculations, б — measured values

Проверена зависимость решения от калибровочных параметров. При изменении параметров модели ψ , r , W_2 поочередно на 10 % глубина СТС меняется на 4, 1.3, 4.2 % соответственно.

С выбранными параметрами модели выполнены прогнозные расчеты для 2009 и 2011 гг. Использовались только среднесуточные значения температуры воздуха. На рис. 1 показана динамика заглубления талого грунта, на рис. 2 приведены графики температуры поверхности почвы, на рис. 3 — вертикальные профили температуры в талом слое. На рисунках точками обозначены измеренные значения, сплошными линиями — результаты расчетов. Рассчитанные значения толщины талого слоя и температуры поверхности почвы согласуются с данными измерений.

Заключение

Разработана малоразмерная численная модель для прогноза температуры в талом и мерзлом слоях и заглубления талого слоя в летний период. Предложена упрощенная модель в “приближении медленных движений границ фазового перехода”. Калибровочные параметры модели для исследуемого района находятся по известным данным о глубине талого слоя и температуре воздуха в один из летних сезонов. Тестовые расчеты по предложенной модели показывают ее адекватность, согласованность с натурными измерениями. Особенностью модели является относительно небольшое количество входных параметров. В рассмотренном варианте для прогноза динамики сезонно-талого слоя достаточно знать сценарии изменений температуры воздуха.

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ФИЦ КНЦ СО РАН, проект 0002 № 0287-2021.

Список литературы

- [1] **Анисимов О.А., Нельсон Ф.Э.** Прогноз изменения мерзлотных условий в северном полушарии: Применение результатов балансовых и транзитивных расчетов по моделям общей циркуляции атмосферы. Криосфера Земли. 1998; II(2):53–57.
- [2] **Малевский-Малевич С.П., Молькентин Е.К., Надежина Е.Д., Симонов В.В., Шкляревич О.Б.** Модельные расчеты мощности толщины многолетнемерзлый пород и глубины сезонного протаивания суглинков при современном климате. Криосфера Земли. 2000; IV(4):49–56.
- [3] **Павлов А.В., Перльштейн Г.З., Типенко Г.С.** Актуальные аспекты моделирования и прогноза термического состояния криолитозоны в условиях меняющегося климата. Криосфера Земли. 2010; XIV(1):3–12.
- [4] **Goodrich L.E.** The influence of snow cover on the ground thermal regime. Canadian Geotechnical Journal. 1982; 19(4):421–432.
- [5] **Аржанов М.М., Елисеев А.В., Демченко П.Ф., Мохов И.И., Хон В.Ч.** Моделирование температурного и гидрологического режима водосборов сибирских рек в условиях вечной мерзлоты с использованием данных реанализа. Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2008; 44(1):86–93.

- [6] **Belolipetskii V.M., Genova S.N.** A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2016; 9(2):158–165.
- [7] **Белоліпецкіі В.М., Генова С.Н.** О применении одномерной вертикальной модели динамики вечной мерзлоты для района озера Тулик (Аляска). Решетневские чтения, материалы XXIV Международной научно-практической конференции, Ч. 1. Красноярск, 2020. Красноярск: СибГУ им. М.Ф. Решетнева; 2020: 476–477.
- [8] **Будак Б.М., Гольдман Н.Л., Успенский А.Б.** Разностные схемы с выпрямлением фронтов для решения многофронтных задач типа Стефана. *Докл. АН СССР*. 1966; 167(4):735–738.
- [9] **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС; 2003: 784.
- [10] **Romanovsky V.** Network of permafrost observatories in North America and Russia: Alaska. Arctic Data Center. 2009. DOI:10.18739/A2FJ29C23. Available at: <https://arcticdata.io/catalog/view/doi%3A10.18739%2FA2FJ29C23>
- [11] **Будыко М.И.** Тепловой баланс земной поверхности. Ленинград: Гидрометеиздат; 1956: 254.
- [12] **Анисимов О.А., Белолуцкая М.А.** Влияние изменения климата на вечную мерзлоту: Прогнозирование и оценка неопределенности. Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. СПб.: Гидрометеиздат, 2003; (19):21–38.
- [13] **Павлов А.В.** Теплофизика ландшафтов. Новосибирск: Наука; 1979: 285.
- [14] **Тимофеев Н.А.** Радиационный режим океанов. Киев: Наукова думка; 1983: 247.

MATHEMATICAL MODELLING

DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.002

Application of the vertical model of the seasonally thawed layer for the Tulik Lake area (Alaska)

BELOLIPETSKII VICTOR M., GENOVA SVETLANA N.*

Institute of Computational Modelling SB RAS — subdivision of FRC KSC SB RAS, 660036, Krasnoyarsk, Russia

*Corresponding author: Genova Svetlana N., e-mail: sv@icm.krasn.ru

Received February 2, 2021, revised May 31, 2021, accepted June 4, 2021.

Abstract

Due to the change in global air temperature, the assessment of permafrost reactions to climate change is of interest. As the climate warms, both the thickness of the thawed soil layer and the period for existence of the talik are increased.

The present paper proposes a small-size numerical model of vertical temperature distributions in the thawed and frozen layers when a frozen layer on the soil surface is absent. In the vertical direction, thawed and frozen soils are separated. The theoretical description of the temperature field in soils when they freeze or melt is carried out using the solution of the Stefan problem. The mathematical model is based on thermal conductivity equations for the frozen and melted zones. At the interfacial boundary, the Dirichlet condition for temperature and the Stefan condition are set.

The numerical methods for solving of Stefan problems are divided into two classes, namely, methods with explicit division of fronts and methods of end-to-end counting. In the present work, the method with the selection of fronts is implemented.

In the one-dimensional Stefan problem, when transformed to new variables, the computational domain in the spatial variable is mapped onto the interval $[0, 1]$. In the presented equations, the convective terms characterize the rate of temperature transfer (model 1). A simplified version of the Stefan problem solution is considered without taking into account this rate (“approximation of slow movements of the boundaries of the phase transition”, model 2).

The model is tuned to a specific object of research. Model parameter values can vary significantly in different geographic regions. This paper simulates the dynamics of permafrost in the area of Lake Tulik (Alaska) in summer. Test calculations based on the proposed simplified model show its adequacy and consistency with field measurements. The developed model can be used for qualitative studies of the long-term dynamics of permafrost using data of the air temperature, relative air humidity and precipitation.

Keywords: permafrost, mathematical model, Stefan problem, empirical relations, summer period.

Citation: Belolipetskii V.M., Genova S.N. Application of the vertical model of the seasonally thawed layer for the Tulik Lake area (Alaska). Computational Technologies. 2021; 26(4):4–15. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.002. (In Russ.)

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Federal Research Center KSC SB RAS, project 0002.№ 0287-2021.

References

1. **Anisimov O.A., Nelson F.E.** Prediction of permafrost conditions in the northern hemisphere: Application of results from equilibrium and transient general circulation models. *Earth’s Cryosphere.* 1998; II(2):53–57. (In Russ.)
2. **Malevski-Malevich S.P., Molkentin E.K., Nadyozhina E.D., Simonov V.V., Shklyarevich O.B.** Model calculations of permafrost thickness and loam seasonally thawed layer distribution under the current climate. *Earth’s Cryosphere.* 2000; IV(4):49–56. (In Russ.)
3. **Pavlov A.V., Perlshtein G.Z., Tipenko G.S.** Actual aspects of modeling and prediction of the permafrost thermal state under climate change conditions. *Earth’s Cryosphere.* 2010; XIV(1):3–12. (In Russ.)
4. **Goodrich L.E.** The influence of snow cover on the ground thermal regime. *Canadian Geotechnical Journal.* 1982; 19(4):421–432.
5. **Arzhanov M.M., Eliseev A.V., Demchenko P.F., Mokhov I.I., Khon V.Ch.** Simulation of thermal and hydrological regimes of siberian river watersheds under permafrost conditions from reanalysis data. *Izvestiya RAS. Atmospheric and Ocean Physics.* 2008; 44(1):86–93. (In Russ.)
6. **Belolipetskii V.M., Genova S.N.** A numerical model of the seasonal thawing of permafrost in the bog-lake landscapes. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics.* 2016; 9(2):158–165.
7. **Belolipetskiy V.M., Genova S.N.** On the application of a one-dimensional vertical model of permafrost dynamics for Toolik Lake region (Alaska). *Reshetnevskie Chteniya, Materialy XXIV Mezhdunarodnoy Nauchno-prakticheskoy Konferentsii [Reshetnev Readings, Materials of the XXIV International Scientific and Practical Conference]*, Ch. 1, Krasnoyarsk, 2020. Krasnoyarsk: Reshetnev Siberian State University of Science and Technology; 2020: 476–477. (In Russ.)
8. **Budak B.M., Goldman N.L., Uspenskii A.B.** Difference schemes with linearization of fronts for solution of multifront problems of Stefan type. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1966; 167(4):735–738. (In Russ.)
9. **Samarsky A.A., Vabishchevich P.N.** *Vychislitel’naya teploperedacha [Computational heat transfer]*. Moscow: Editorial URSS; 2003: 784. (In Russ.)
10. **Romanovsky V.** Network of permafrost observatories in North America and Russia: Alaska. Arctic Data Center. 2009. DOI:10.18739/A2FJ29C23. Available at: <https://arcticdata.io/catalog/view/doi%3A10.18739%2FA2FJ29C23>

11. **Budyko M.I.** Teplovoy balans zemnoy poverkhnosti [Thermal balance of the Earth's surface]. Leningrad: Hydrometeoizdat; 1956: 254. (In Russ.)
12. **Anisimov O.A., Belolutsкая M.A.** Climate change impacts on the permafrost: Predictive modelling and uncertainties. Problemy Ekologicheskogo Monitoringa i Modelirovaniya Ekosistem. Saints-Petersburg: Hydrometeoizdat; 2003; (19):21–38. (In Russ.)
13. **Pavlov A.V.** Teplofizika landshaftov [Thermal physics of landscapes]. Novosibirsk: Nauka; 1979: 285. (In Russ.)
14. **Timofeev N.A.** Radiatsionnyy rezhim okeanov [Radiation regime of the oceans]. Kiev: Naukova dumka; 1983: 247. (In Russ.)